Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2.**
Département Informatique

Logique mathématique

Correction de la série de TD 3 (2014-2015)

Exercice 1: Déterminons les occurrences libres et liées des trois formules données :
1 : Pour la formule $\forall \mathbf{z}((\underbrace{\forall x \alpha(x,y)}) \Rightarrow \alpha(\mathbf{z},\mathbf{x}))$,le champs du quantificateur universel relatif à la variable x, $(\forall x)$ est indiqué par une sous-accolade et le champs du quantificateur universel relatif à la variable z, $(\forall z)$ est souligné et il n'y a pas de quantificateur relatif à la variable y, ainsi on constate que :

- la variable x à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable z est liée tout le temps.
- la variable y est libre,

2 : Pour la formule $\forall \mathbf{y} \underline{\alpha(\mathbf{z},\mathbf{y})} \Rightarrow \forall \mathbf{z} \underline{\underline{\alpha(\mathbf{z},\mathbf{x})}}$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable y est souligné par une seule ligne el le champs du quantificateur universel relatif à la variable z est souligné par deux lines, ainsi on constate que :

- la variable y à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable z à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est libre et celle à droite est liée.

3 : Pour la formule $(\forall \mathbf{y} \exists \underbrace{x \exists z \beta(x,y,f(x,y))}) \vee (\underline{\underline{\forall \mathbf{x} \alpha(\mathbf{y},\mathbf{g}(\mathbf{x}))}})$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable y est souligné par une seule ligne, le champs du quantificateur existentiel relatif à la variable x à gauche du connecteur $\vee$ est indiqué par une sous-accolade et le champs du quantificateur universel relatif à la variable x à droite du connecteur $\vee$ est souligné par deux lignes, ainsi on constate que :

- la variable y est liée dans toutes ses occurrences.
- la variable x à gauche du connecteur $\vee$ est liée au quantificateur existentiel $(\exists y)$ et la variable x à droite du connecteur $\vee$ est liée au quantificateur universel $(\forall x)$.
- la variable y est libre,

- il n'y a pas de variable z dans la formule donc le quantificateur relatif à cette variable z peut être exclu de cette formule ainsi la formule sera équivalente à la formule : $(\forall \mathbf{y} \exists \underbrace{x \beta(x,y,f(x,y))}) \vee (\underline{\underline{\forall \mathbf{x} \alpha(\mathbf{y},\mathbf{g}(\mathbf{x}))}})$

Exercice 2: Le langage donné est le suivant $L = P, R, f, g, c$ où les symboles des relations (prédicats) sont P unaire et R binaire. Les symboles de fonctions sont f unaire et g unaire. Le symbole c est un symbole de constante.
Pour chacune des expressions données de 1 jusqu'à 14 on déterminera s'il s'agit d'une formule du langage L donné, si ce n'est pas le cas justifier pourquoi :

1) $\forall(x,y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.
2) $\alpha(x,y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.

3) $g(x,y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.
4) $R(g(x,y))$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car la fonction g est binaire et dans cette formule on lui a associé deux arguments.
5) $P(R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
6) $x = g(x,y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car elle contient le connecteur égalité "=" qui n'a aucun sens dans ce langage d'ordre 1.
7) $R(f(x), g(x,c))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
8) $\forall x R(x,x)$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
9) $\forall x \exists y R(x,x)$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
10) $\exists y(y = c \wedge P(y))$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car elle contient le connecteur égalité "=" qui n'a aucun sens dans un langage de premier ordre.
11) $\exists x(P(f(x) \wedge \forall y R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
12) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
13) $\forall x \forall x P(g(f(x),x))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
14) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

Exercice 3: On a $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 : \forall x \exists y P(x,y); x \text{ est lée et } y \text{ est liée.} \\ \alpha_2 : \forall x P(x,y); x \text{ est liée et } y \text{ est libre.} \\ \alpha_3 : \exists y P(x,y); x \text{ est libre et } y \text{ est liée.} \end{cases}$$

Soit la formule $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$.

I.) Montrons que $\alpha_1, \alpha_{2,3}$ sont satisfiables :

Pour montrer qu'une formule est satisfiable il suffit de trouver une interprétation et une valuation pour les quelles cette formule est vraie.

Remarque : comme solution je vais vous donner des interprétation et des valuation telles que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient satisfiables mais ces interprétations ne sont pas uniques vous pouvez trouver d'autres interprétations.

Pour α_1 : Je vous suggère l'interprétation I_1 de domaine de base $D_1 = \mathbb{N}$, et on définit le prédicat P : " $\leq$ ". Avec cette interprétation, on a : $\alpha_1 \equiv \forall x \exists y\ (x \leq y)$. On a les deux variables x et y sont liées.

On constate que α_1 est satisfait tout le temps car pour tout entier on peut lui trouver un entier qui lui soit supérieur, c'est à dire α_1 est satisfaite pour toutes les valuation de I_1, ainsi I_1 est un modèle, (i.e. $I \models \alpha_1$).

Pour α_2 : Je vous suggère l'interprétation I_2 de domaine de base $D_2 = \mathbb{N}^*$, et on définit le prédicat $\overline{P(x,y)}$: x multiple de y. Avec cette interprétation, on a : $\alpha_2 \equiv \forall x, x$ est un multiple de y. On a la variable x est liée et la variable y est libre. Soit alors valuation $v(y) = 1$, pour cette valuation α_2 est satisfaite car tout entier non nul est un multiple de 1, donc $I_2 \models (\alpha_2)_{v(y=1}$. Cependant I_2 n'est pas un modèle de α_2, en effet cette formule α_2 n'est pas satisfiable pour toutes les valuations de I_2, en effet pour par exemple la valuation $v(y) = c$ avec $c \neq 1$, α_2 n'est pas satisfaite, i.e. $_2 \models\neq \alpha_2$.

Pour α_3 : Je vous suggère l'interprétation I_3 de domaine de base $D_3 = \{2,4,6,8\}$, et on définit le prédicat

$P(x,y)$: "x diviseur de$y$". Donc pour cette interprétation on a : $\alpha_3 \equiv \exists y, x$ est un diviseur de$y$. On a la variable x est libre et la variable y est liée. Pour la valuation $v(x) = 2$, on a $_3(\alpha_3) : \exists y/2$ est un diviseur de y est satisfaite donc $I_3 \models (\alpha_3)_{v(x)=2}$. On constate que pour toutes les valuations possible de x, la formule α_3 est satisfiable, donc I_3 est un modèle de α_3 (i.e. $I_3 \models \alpha_3$).

II.) Précédemment on a trouvé une interprétation I_1 qui est un modèle pour la formule α_1 et une interprétation $_3$ qui est un modèle pour la formule α_3, maintenant je vous propose une interprétation qui soit un modèle pour l'ensemble des trois formules données $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Soit l'interprétation I' de domaine de base $D' = \{1\}$ et telle que $P(x,y)$: "$x \leq y$". Pour cette interprétation il est facile de vérifier que : $I' \models \alpha_1,\ I' \models \alpha_2$ et $I' \models \alpha_3$, donc E est satisfiable et même plus I' est un modèle pour E (i.e. $I' \models E$).

III.) Montrons que F n'est pas une conséquence logique de E.

On a : $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$, on constate que y est libre dans la partie gauche de $\wedge$ et x est liée.

On reprend l'interprétation I' considérée précédemment (bien sur on aurais pu choisir une autre interprétation), pour cette interprétation I' on a montrer que :

$$I' \models E, \tag{1}$$

On a : $I'(F) : \underbrace{\underbrace{\forall x(x \leq 1)}_{vraie} \wedge \underbrace{\forall y, x > y}_{fausse}}_{fausse}$, donc :

$$I' \models \neq, \tag{2}$$

alors de (1) et (2) on conclut que F n'est pas une conséquence logique de E, i.e. $E \models \neq F$.

Exercice 4: On a : $F \equiv \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y)$. on a la variable x est liée et la variable y est libre.

1. On va trouver un modèle pour la formule F. Soit alors l'interprétation I de domaine de base $D = \{2, 6, 20, 40\}$ et $R(x)$: "x est pair". Pour toutes les valuations possibles $\{v(y) = 2, v(y) = 6, v(y) = 20, v(y) = 40\}$ de la variable libre y, on constate que F est vraie, car :

$$\underbrace{\underbrace{\exists x R(x)}_{vraie} \Rightarrow R(y)}_{vraie}.$$

Donc I' est un modèle de F (i.e. $I' \models F$).

2. La forme prénexe de F est la suivante :

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists R(x) \Rightarrow R(y); \\ &\equiv \forall x[R(x) \Rightarrow R(y)]. \end{aligned}$$

Remarque on a enlever le quantificateur de y car la variable y est libre elle n'est pas dans le champs de ce quantificateur donc ça ne sert à rien de garder ce quantificateur.

3. La forme prénexe de la négation de la formule F c'est exactement la négation de la forme prénexe de F, c'est à dire c'est :

$$\begin{aligned} \overline{F} &\equiv \overline{\forall x[R(x) \Rightarrow R(y)]}, \\ &\equiv \exists x[R(x) \Rightarrow R(y)]. \end{aligned}$$

(remarque il faut réviser les identités données en cours qui sont nécessaires pour trouver une forme prénexe.)

4. La forme skolem de F est la exactement la forme prénexe de F car il n'y a pas de quantificateur existentiel dans la forme prénexe de F, donc :

$$F^{sko} \equiv \forall x[R(x) \Rightarrow R(y)].$$